7. Το ορισμένο ολοκλήρωμα

7.1. Το ορισμένο ολοκλήρωμα

Για το αόριστο ολοκλήρωμα βρήκαμε ότι:

Αν η συνάρτηση $F(x)$ είναι μια αρχική συνάρτηση της $f(x)$, τότε το αόριστο ολοκλήρωμα της $f(x)$ ως προς x είναι $I(x) = \int f(x)\,dx = F(x) + c$, όπου $c =$ σταθερά.

Στη σχέση $I(x) = F(x) + c$, θέτοντας $x = a$ έχουμε $I(a) = F(a) + c$, ενώ θέτοντας $x = b$ έχουμε $I(b) = F(b) + c$. Αφαιρώντας τις δύο αυτές εξισώσεις, απαλείφουμε το c, και έχουμε $I(b) - I(a) = F(b) - F(a)$.

Συμβολίζουμε τη διαφορά $I(b) - I(a)$ με $\int_a^b f(x)\,dx$. Έτσι έχουμε

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a) \quad . \tag{7.1}$$

Αυτό είναι το *θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού.*

Ονομάζουμε το $\int_a^b f(x)\,dx$ *το ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης* $f(x)$ *ως προς* x *μεταξύ των ορίων* $x = a$ *και* $x = b$.

Η διαδικασία υπολογισμού του ορισμένου ολοκληρώματος δίνεται από την εξίσωση ορισμού (7.1): Αφού βρεθεί μια παράγουσα συνάρτηση $F(x)$ της $f(x)$, το ζητούμενο ορισμένο ολοκλήρωμα είναι ίσο με τη διαφορά των τιμών της $F(x)$ στα σημεία $x = a$ και $x = b$, δηλαδή $F(b) - F(a)$. Αυτό συμβολίζεται με $\left[F(x)\right]_a^b$ ή $F(x)\big|_a^b$. Η τιμή $x = a$ ονομάζεται *το κάτω όριο της ολοκλήρωσης* και η $x = b$ *το άνω όριο.*

Κάποια παραδείγματα θα επιδείξουν τη διαδικασία υπολογισμού των ορισμένων ολοκληρωμάτων:

Παράδειγμα 1

$$\int_0^1 x\,dx = \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}(1^2 - 0^2) = \frac{1}{2}$$

Παράδειγμα 2

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \left[\ln x\right]_a^b = \ln b - \ln a = \ln\left(\frac{b}{a}\right) \qquad (ab > 0)$$

Παράδειγμα 3

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = -\left[\cos x\right]_0^\pi = -[(-1) - (1)] = 2$$

Παράδειγμα 4

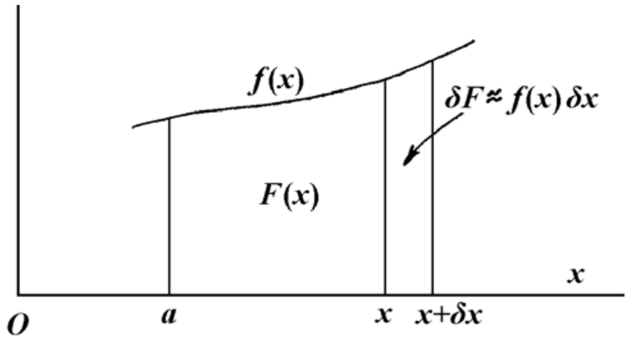
$$\int_0^1 e^x\,dx = \left[e^x\right]_0^1 = e - 1$$

Παράδειγμα 5

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = -0 + 1 = 1$$

7.2. Γεωμετρική ερμηνεία του ορισμένου ολοκληρώματος

Έστω η συνάρτηση $f(x)$, την οποία για ευκολία παίρνουμε συνεχή και θετική σε όλες τις τιμές του x που θα θεωρήσουμε. Επίσης έστω ότι η συνάρτηση $F(x)$ δίνει το εμβαδόν (στις κατάλληλες μονάδες) της επιφάνειας μεταξύ του άξονα των x, της καμπύλης $f(x)$, και των ευθειών που είναι κάθετες στον άξονα των x στα σημεία a και x (βλ. σχήμα). Αν προσθέσουμε στο εμβαδόν τη λεπτή λωρίδα μεταξύ x και $x+\delta x$, το εμβαδόν θα αυξηθεί κατά $\delta F \approx f(x)\delta x$ περίπου, γιατί η λωρίδα έχει εύρος δx και ύψος περίπου $f(x)$ σε όλο της το εύρος. Η προσέγγιση γίνεται τόσο πιο ακριβής όσο πιο στενή είναι η λωρίδα.



Επομένως $f(x) \approx \dfrac{\delta F}{\delta x}$, και στο όριο $\delta x \to 0$, είναι $f(x) = \dfrac{dF}{dx}$.

Η $F(x)$ είναι επομένως μια παράγουσα συνάρτηση της $f(x)$, και μπορούμε να γράψουμε

$$F(x) = I(x) + c\,, \qquad \text{όπου } I(x) = \int f(x)\,dx\,. \tag{7.2}$$

Από τον ορισμό της $F(x)$, προφανώς είναι $F(a) = 0$ και επομένως $F(a) = I(a) + c = 0$, ή $I(a) = -c$. Έτσι βρίσκουμε ότι $F(x) = I(x) - I(a)$, ή, τελικά, ότι

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx\,. \tag{7.3}$$

(Θα μπορούσαμε ίσως πιο σωστά να γράψουμε $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ για να τονίσουμε τη διαφορά ανάμεσα στη μεταβλητή της ολοκλήρωσης και του άνω ορίου της ολοκλήρωσης.)

Καταλήγουμε έτσι στο συμπέρασμα ότι:

Το εμβαδόν $F(x)$ της επιφάνειας που βρίσκεται μεταξύ του άξονα των x, της καμπύλης $f(x)$, και των ευθειών που είναι κάθετες στον άξονα των x στα σημεία a και x, δίνεται από το ορισμένο ολοκλήρωμα της $f(x)$ ανάμεσα στα σημεία a και x, δηλαδή $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

Είναι σαφές ότι η ολοκλήρωση είναι μια διαδικασία άθροισης. Για το λόγο αυτό, το σύμβολο $\int$ είναι ένα επιμηκυμένο S, από τη λατινική λέξη summa = άθροισμα.

Τα ακόλουθα παραδείγματα θα αποσαφηνίσουν όσα αναφέραμε.

Παράδειγμα 6

Να βρεθεί το εμβαδόν ανάμεσα στην παραβολή $y(x) = x^2$, τον άξονα των x, και των καθέτων στον άξονα των x στα σημεία $x = 1$ και $x = 2$.

Από τη σχέση που βρέθηκε, το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$S = \int_1^2 y(x)\,dx = \int_1^2 x^2\,dx = \tfrac{1}{3}x^3\Big|_1^2 = \frac{1}{3}(2^3 - 1^3) = \frac{7}{3}$$

Παράδειγμα 7

Να βρεθεί το εμβαδόν ανάμεσα στην καμπύλη $\sin x$ και τον άξονα των x, μεταξύ των σημείων: (α) $x=0$ και $x=\pi$. (β) $x=\pi$ και $x=2\pi$. (γ) $x=0$ και $x=2\pi$.

Επειδή $\int \sin x\, dx = -\cos x$, τα ζητούμενα εμβαδά είναι:

(α) $\int_0^{\pi} \sin x\, dx = -\left[\cos x\right]_0^{\pi} = -[(-1)-(1)] = 2$

(β) $\int_{\pi}^{2\pi} \sin x\, dx = -\left[\cos x\right]_{\pi}^{2\pi} = -[(1)-(-1)] = -2$

(γ) $\int_0^{2\pi} \sin x\, dx = -\left[\cos x\right]_0^{2\pi} = -[(1)-(1)] = 0$

Βλέπουμε ότι, για αυξανόμενο x, το εμβαδόν $dF(x) = f(x)\,dx$ είναι θετικό για θετικές τιμές της συνάρτησης $f(x)$ και αρνητικό για αρνητικές τιμές. Έτσι, για παράδειγμα, στο σύνολό του το εμβαδόν $\int_0^{2\pi} \sin x\, dx$ είναι ίσο με μηδέν.

Παράδειγμα 8

Η δύναμη που ασκείται πάνω σε μια σημειακή μάζα δίνεται, συναρτήσει της θέσης, από τη σχέση $F_x(x) = kx$. Να βρεθεί το έργο που παράγει η δύναμη όταν μετατοπίζει τη μάζα από τη θέση $x=0$ στη θέση $x=X$.

Έστω ότι συμβολίζουμε με $W(x)$ το έργο που παράγει η δύναμη όταν μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της από κάποιο σημείο αναφοράς (το οποίο θα μπορούσε για παράδειγμα να είναι το $x=0$ αλλά και οποιοδήποτε άλλο σημείο) έως το σημείο x.

Κατά τη μετατόπιση της μάζας από τη θέση x στη θέση $x+\delta x$, η δύναμη παράγει έργο που δίνεται προσεγγιστικά από τη σχέση $\delta W \approx F_x(x)\delta x$, από όπου προκύπτει ότι $\dfrac{\delta W}{\delta x} \approx F_x(x)$. Η σχέση δεν είναι ακριβής, γιατί για μη μηδενική μετατόπιση δx η δύναμη είναι μόνο προσεγγιστικά ίση με $F_x(x)$ σε όλο το μήκος της μετατόπισης δx. Το σφάλμα γίνεται ολοένα και μικρότερο καθώς $\delta x \to 0$, οπότε και έχουμε την ακριβή σχέση $\dfrac{dW}{dx} = F_x(x)$. Αυτή η σχέση, αν ολοκληρωθεί ως προς x, δίνει

$$W(x) = \int F_x(x)\,dx = G(x) + c$$

όπου $G(x)$ είναι μια παράγουσα της $F_x(x)$. Για δύο τιμές του x, τις a και b, έχουμε

$$W(a) = G(a) + c \quad \text{και} \quad W(b) = G(b) + c \quad \text{ή} \quad W(b) - W(a) = G(b) - G(a) = \int_a^b F_x(x)\,dx\,.$$

Άρα το έργο που παράγει η δύναμη όταν μετατοπίσει το σημείο εφαρμογής της από το σημείο $A(\,x=a\,)$ στο σημείο $B(\,x=b\,)$, το οποίο συμβολίζουμε με $W_{A\to B}$, δίνεται από τη σχέση

$$W_{A\to B} \equiv W(b) - W(a) = \int_a^b F_x(x)\,dx\,.$$

Είναι επομένως ίσο με το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη της δύναμης $F_x(x)$, ανάμεσα στα σημεία $x=a$ και $x=b$, ή με το ορισμένο ολοκλήρωμα της $F_x(x)$, ως προς x, ανάμεσα στα σημεία $x=a$ και $x=b$.

Για τη συγκεκριμένη περίπτωση του Παραδείγματος, είναι $F_x(x) = kx$, $a=0$ και $b=X$.

Επομένως, $$W_{A\to B} = \int_0^X kx\,dx = \left[\tfrac{1}{2}kx^2\right]_0^X = \tfrac{1}{2}kX^2\,.$$

7.3 Ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος

Από τις ιδιότητες του αόριστου ολοκληρώματος και τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος, προκύπτουν οι εξής ιδιότητες του αόριστου ολοκληρώματος.
Προφανώς,

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \equiv \int_a^b f(t)\,dt \equiv \int_a^b f(z)\,dz} \qquad (7.4)$$

$$\boxed{\int_a^b dF(x) = F(b) - F(a)} \qquad (7.5)$$

$$\boxed{\int_a^a f(x)\,dx = 0} \qquad (7.6)$$

$$\boxed{\int_a^b \left[f(x) + g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx} \qquad (7.7)$$

και

$$\boxed{\int_a^b k\ f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \qquad k = \text{σταθερό}} \qquad (7.8)$$

Από τον ορισμό $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, έπεται ότι

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = -\big(F(a) - F(b)\big) = -\int_b^a f(x)\,dx$$

ή

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx} \qquad (7.9)$$

Επίσης,

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \big(F(b) - F(a)\big) + \big(F(c) - F(b)\big) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)\,dx$$

ή

$$\boxed{\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx} \qquad (7.10)$$

Αν $\dfrac{dF}{dx} = f(x)$, και επειδή $\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$, έπεται ότι

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x) \qquad \text{για} \quad a = \text{σταθερό}} \qquad (7.11)$$

7.4 Μέση τιμή συνάρτησης

Η μέση τιμή της συνάρτησης $f(x)$ ως προς τη μεταβλητή x στο διάστημα (x_1, x_2) ορίζεται ως

$$\overline{f} = \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\ . \qquad (7.12)$$

Παράδειγμα 9

Να βρεθεί η μέση τιμή της συνάρτησης $f(x) = \sin x$, ως προς x, στο διάστημα $[\,0, \pi\,]$.

Από τον ορισμό, $\overline{\sin x} = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\,dx = \dfrac{1}{\pi}\left[-\cos x\right]_0^{\pi} = \dfrac{2}{\pi}$

Στο διάστημα $[0, 2\pi]$, η μέση τιμή της ίδιας συνάρτησης είναι ίση με μηδέν.

Παράδειγμα 10

Να βρεθεί η μέση τιμή της συνάρτησης $f(x) = \sin^2 x$, ως προς x, στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

Είναι $$\overline{\sin^2 x} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\pi = \frac{1}{2}.$$

Επειδή $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, έπεται ότι $\overline{\sin^2 x} + \overline{\cos^2 x} = 1$ και επομένως και $\overline{\cos^2 x} = \frac{1}{2}$.

Οι μέσες τιμές που βρέθηκαν είναι για μια πλήρη περίοδο των συναρτήσεων $\sin x$ και $\cos x$. Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει και για κάθε ακέραιο πολλαπλάσιο της περιόδου 2π.

7.5 Πίνακας στοιχειωδών ορισμένων ολοκληρωμάτων

1. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{a + x^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}} \quad (a > 0)$

2. $\displaystyle\int_0^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\pi}{2}$

3. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = 1$

4. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx = \frac{\pi}{4}$

5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (n-3)(n-1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (n-2)n} \quad (n = \text{περιττό})$

6. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (n-3)(n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (n-2)n}\frac{\pi}{2} \quad (n = \text{άρτιο})$

7. $\displaystyle\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad (a > 0, n > -1)$

8. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a > 0)$

Προβλήματα

1 Από το $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c$, δείξτε ότι $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{b + x^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{b}} \quad (b > 0)$.

2 Δείξτε ότι $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

3 Δείξτε ότι $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = 1$ και $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx = \frac{\pi}{4}$.

Βιβλιογραφία

M. R. Spiegel, *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις ΕΣΠΙ, Αθήνα, 1982. Κεφ. 5.